第二章　解析函数

2.1　解析函数的概念

作业 1. 判断题: 如果 $f'(z_0)$ 存在, 那么 $f(z)$ 在 z_0 解析.($\times$)

解析. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行. ■

作业 2. 判断题: 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的奇点, 那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点.($\times$)

解析. 例如 0 是 $f(z)=-g(z)=\dfrac{1}{z}$ 的奇点却不是 $f(z)+g(z)=0$ 的奇点.

例如 1 是 $f(z)=g(z)=\overline{z}$ 的奇点却不是 $f(z)/g(z)=1$ 的奇点. ■

作业 3. 单选题: (2021 年 A 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内可导是 $f(z)$ 在该邻域内解析的 (C).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

解析. 邻域是个开集, 其中每个点都存在一个邻域被包含在其中. ■

作业 4. (2021 年 A 卷) 设 $f(z)=\dfrac{1}{5}z^5-(1+i)z$, 解方程 $f'(z)=0$.

解. 由于 $f'(z)=z^4-(1+i)=0$, 因此

$$
\begin{aligned}
z&=\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}i\right), k=0,1,2,3\\
&=\sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{9\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{17\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{25\pi i}{16}\right).
\end{aligned}
$$
■

2.2 函数解析的充要条件

作业 5. 判断题: 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z)=u+iv$ 亦可导.(×)

解析. 不仅要 u,v 可导, 还需要可微, 还需要满足 C-R 方程才行. ■

作业 6. 单选题: (2021 年 B 卷) 下列函数中, 为解析函数的是 (C).

(A) x^2-y^2-2xyi (B) x^2+xyi

(C) $2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$ (D) x^3+iy^3

解析. 根据 C-R 方程可知只有 C 满足

$$u_x=v_y=2y,\quad u_y=-v_x=-2x+2.$$

实际上 $2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)=-iz^2+2iz$. ■

作业 7. 填空题: 函数 $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $\underline{\quad -1,\pm i \quad}$.

解析. 由于分子分母都是解析函数, 因此奇点是分母为 0 的点. ■

作业 8. 填空题: (2022 年 A 卷) 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=\underline{\quad 2 \quad}$.

解析. 由 C-R 方程,

$$u_x=2x-2y=v_y=bx+2cy,\quad u_v=-2x-2y=-v_x=-(2ax+by).$$

因此 $a=1,b=2,c=-1,a+b+c=2$. ■

作业 9. 下列函数何处可导? 何处解析?

(1) $f(z)=1/\overline{z}$; (2) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$;

(3) $f(z)=e^{x^2+y^2}$; (4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$.

解. (1) 由于 $f(z)=\dfrac{x+yi}{x^2+y^2},u=\dfrac{x}{x^2+y^2},v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$$u_x=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-v_y,\quad u_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=v_x,$$

因此 $f(z)$ 处处不可导, 处处不解析.

(2) 由于 $u=x^3-3xy^2,v=3x^2y-y^3$,

$$u_x=3x^2-3y^2=v_y=3x^2-3y^2,\quad u_y=-6xy=-v_x=-6xy,$$

因此 $f(z)$ 在 处处可导, 处处解析. 事实上 $f(z)=z^3$.

(3) 由于 $u=e^{x^2+y^2}, v=0$,

$$u_x=2xe^{x^2+y^2}=v_y=0,\quad u_y=2ye^{x^2+y^2}=-v_x=0,$$

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导, 处处不解析.

(4) 由于 $u=\sin x\operatorname{ch} y, v=\cos x\operatorname{sh} y$,

$$u_x=\cos x\operatorname{ch} y=v_y=\cos x\operatorname{ch} y,\quad u_y=\sin x\operatorname{sh} y=-v_x=\sin x\operatorname{sh} y,$$

因此 $f(z)$ 处处可导, 处处解析. 事实上 $f(z)=\sin z$. ■

作业 10. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析区域, 并求出其导数.

(1) z^3+2iz; (2) $\dfrac{1}{z^2-1}$; (3) $\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(c,d$ 不全为零).

解. (1) 处处解析, $f'(z)=3z^2+2i$.

(2) 在 $z\neq\pm1$ 处解析, $f'(z)=-\dfrac{2z}{(z^2-1)^2}$.

(3) 若 $c=0$, 则处处解析; 若 $c\neq0$, 则在 $z\neq-\dfrac{d}{c}$ 处解析. $f'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. ■

作业 11. 设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数, 试确定实数 l,m,n 的值.

解. 由于 $u=my^3+nx^2y, v=x^3+lxy^2$.

$$u_x=2nxy=v_y=2lxy,\quad u_y=3my^2+nx^2=-v_x=-3x^2-ly^2.$$

因此 $n=l, 3m=-l, n=-3$, 故 $l=n=-3, m=1$. ■

2.3 初等函数

作业 12. 选择题: (2021 年 A 卷) 下列式子一定正确的是 (BC).

(A) $\operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg} z$ (B) $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2)$

(C) $\operatorname{Ln}\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln} z$ (D) $\operatorname{Ln} z^2=2\operatorname{Ln} z$

作业 13. 填空题: (2021 年 B 卷) 设复数 $z=1^{\sqrt{3}}$, 则 $|z|=$____1____.

解析. $z=e^{\sqrt{3}\operatorname{Ln}1}=e^{2\sqrt{3}k\pi i}, k\in\mathbb{Z}$, 所以 $|z|=1$. ■

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) i^{-i} 的主值是____$e^{\pi/2}$____.

解析. 幂函数主值为 $i^{-i}=e^{-i\ln i}=e^{-i\cdot\frac{\pi i}{2}}=e^{\pi/2}$. ■

作业 15. (2021 年 A 卷) 求 $\sin(1+i)$ 的虚部.

解. 由于

$$\begin{aligned}\sin(1+i) &= \frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{2i} \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)-e(\cos 1-i\sin 1)}{2i} \\ &= \frac{(e^{-1}-e)\cos 1+i(e^{-1}+e)\sin 1}{2i} \\ &= -\frac{(e^{-1}-e)\cos 1}{2}i+\frac{(e^{-1}+e)\sin 1}{2},\end{aligned}$$

因此 $\sin(1+i)$ 的虚部是 $\dfrac{(e-e^{-1})\cos 1}{2}$. ■

作业 16. (2022 年 A 卷) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试说出 3 点.

解. 例如

- $f'(z)=\cos z, g'(x)=\cos x$.
- 都是奇函数.
- 周期都是 $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导.
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ■

作业 17. 下列关系是否正确? 证明或给出反例.

(1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$;　　(2) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$.

解. (1) 正确.

$$\overline{e^z}=\overline{e^x(\cos y+i\sin y)}=e^x(\cos y-i\sin y)=e^{x-iy}=e^{\bar z}.$$

(2) 正确.

$$\overline{\sin z}=\frac{\overline{e^{iz}-e^{-iz}}}{2i}=\frac{e^{-i\bar z}-e^{i\bar z}}{-2i}=\frac{e^{i\bar z}-e^{-i\bar z}}{2i}=\sin\bar z.$$ ■

作业 18. 找出下列方程的全部解.

(1) $1+e^z=0$;　　(2) $\sin z+\cos z=0$.

解. (1) $z=\mathrm{Ln}(-1)=(2k+1)\pi i, k\in\mathbb{Z}$.

(2) 由于

$$\sin z+\cos z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0,$$

$$(1+i)e^{iz}=(1-i)e^{-iz},\quad e^{2iz}=\frac{1-i}{1+i}=-i,$$

$2iz=\mathrm{Ln}(-i)=(2k-\frac{1}{2})\pi i$, $z=(k-\dfrac{1}{4})\pi, k\in\mathbb{Z}$. ■

作业 19. 求 $\mathrm{Ln}(-i), \mathrm{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

解.

$$\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\,\mathrm{Arg}(-i)=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i,\quad k\in\mathbb{Z},$$

主值为 $\ln(-i)=-\dfrac{1}{2}\pi i$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-3+4i)&=\ln 5+i\,\mathrm{Arg}(-3+4i)\\&=\ln 5+\left(2k\pi+\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)i, k\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

主值为 $\ln(-3+4i)=\ln 5+\left(\pi-\arctan\dfrac{4}{3}\right)i$. ■

作业 20. 求 $\exp\left(1-\dfrac{\pi i}{2}\right)$, 3^i 和 $(1+i)^i$ 的值.

解.

$$\exp\left(1-\frac{\pi i}{2}\right)=-ei.$$

$$3^i=e^{i\,\mathrm{Ln}\,3}=e^{i(\ln 3+2k\pi i)}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+i\sin\ln 3),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}(1+i)^i&=\exp\left[i\,\mathrm{Ln}(1+i)\right]\\&=\exp\left[i\Big[\frac{\ln 2}{2}+(2k+\frac{1}{4})\pi i\Big]\right]\\&=\exp\left[(-2k-\frac{1}{4})\pi\right](\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2}),\quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$ ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 21. 注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

(1) 证明 C-R 方程等价于 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. 所以我们也可以把 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

(2) 利用该结论求函数 $f(z) = \overline{z}, z \operatorname{Im} z, e^{z\overline{z}}$ 的可导点和解析点.

作业 22. 仿照复数的指数函数, 我们可以尝试在矩阵上定义指数函数. 设 $A \in M_m(\mathbb{C})$ 是一个 $m \times m$ 的复矩阵, 我们想说明极限

$$e^A := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}A\right)^n$$

存在.

(1) 当 $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 是一个对角矩阵时, 证明 e^A 存在且

$$e^A = \operatorname{diag}\{e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_m}\}.$$

(2) 当

$$A = J_m(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

是 Jordan 块时, 证明 e^A 存在.

(3) 根据每个方阵都可以相似于一些 Jordan 块证明 e^A 总存在.

(4) 当 $A = xE + yJ = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ 时, 证明 $e^A = \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$.

(5) 证明 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$.

(6) 证明 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.