

第五章 留数

5.1 孤立奇点

作业 1. 单选题: (2020 年 A 卷) $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ 的 (D).

- (A) 一阶极点 (B) 二阶极点 (C) 解析点 (D) 可去奇点

作业 2. 单选题: (2022 年 A 卷) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (A).

- (A) 一阶极点 (B) 一阶零点 (C) 可去奇点 (D) 三阶极点

作业 3. 下列函数有哪些奇点? 如果是极点, 请指出它的阶:

- (1) $\frac{1}{(z-2)^3(z^2+1)^2}$; (2) $\frac{\cos z - 1}{z^3}$; (3) $\frac{1}{z^3 + z^2 - z - 1}$;
(4) $\frac{\ln(z+1)}{z}$; (5) $\frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$; (6) $\frac{1}{e^z - 1}$;
(7) $\frac{1}{z^2(e^z - 1)}$; (8) $\frac{z^6}{1+z^4}$; (9) $\frac{1}{\sin z^2}$.

解. (1) 2 为三阶极点, $\pm i$ 为二阶极点.
(2) 0 为一阶极点.
(3) -1 为二阶极点, 1 为一阶极点.
(4) 0 为可去奇点.
(5) $\pm i$ 为二阶极点, $(2k+1)i$ 为一阶极点, 其中 $k \neq -1, 0$ 为整数.
(6) 没有奇点.
(7) 0 为三阶极点, $2k\pi i$ 为一阶极点, 其中 $k \neq 0$ 为整数.
(8) $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 为一阶极点.
(9) 0 为二阶极点, $\pm\sqrt{k\pi}$ 为一阶极点, 其中 $k \neq 0$ 为整数.
也可写成 $\pm\sqrt{k\pi}, \pm i\sqrt{k\pi}$, 其中 k 为正整数. ■

作业 4. 证明: 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m > 1$ 阶零点, 那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m - 1$ 阶零点.

证明. 设 $g(z) = f'(z)$, 则 $g^{(n)}(z_0) = f^{(n+1)}(z_0)$. 由于

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

因此

$$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(m-2)}(z_0) = 0, \quad g^{(m-1)}(z_0) \neq 0,$$

从而 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点. ■

作业 5. 证明: $\frac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一阶零点.

证明. 由于

$$\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}} + e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{i - i}{2} = 0,$$

$$(\operatorname{ch} z)' \Big|_{z=\frac{\pi i}{2}} = \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{i + i}{2} = i \neq 0,$$

因此 $\frac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一阶零点. ■

作业 6. 0 是 $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$ 的几阶极点?

解. 设 $f(z) = \sin z + \operatorname{sh} z - 2z$, 则

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = (\cos z + \operatorname{ch} z - 2) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$f''(0) = (-\sin z + \operatorname{sh} z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$f'''(0) = (-\cos z + \operatorname{ch} z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = (\sin z + \operatorname{sh} z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = (\cos z + \operatorname{ch} z) \Big|_{z=0} = 2 \neq 0,$$

因此 0 是 $f(z)$ 的 5 阶零点, 从而是 $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$ 的 **10 阶极点**. ■

另解. 设 $f(z) = \sin z + \operatorname{sh} z - 2z$, 则

$$f(z) = \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \cdots \right) + \left(z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \cdots \right) - 2z = \frac{z^5}{60} + \cdots,$$

因此 0 是 $f(z)$ 的 5 阶零点, 从而是 $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$ 的 10 阶极点. ■

作业 7. 设 a 是 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则 $z = a$ 是

$$(1) \varphi(z)\psi(z); \quad (2) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}; \quad (3) \varphi(z) + \psi(z)$$

的什么类型奇点?

解. 如果 a 是 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则

(1) a 是 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 阶极点;

(2) 当 $m > n$ 时, a 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点; 当 $m \leq n$ 时, a 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点;

(3) 当 $m \neq n$ 时, a 是 $\varphi(z) + \psi(z)$ 的 $\max\{m, n\}$ 阶极点; 当 $m = n$ 时, a 是 $\varphi(z) + \psi(z)$ 的 $\leq m$ 阶极点或可去奇点. ■

5.2 留数

作业 8. 填空题: (2020 年 B 卷) 设 $f(z) = \frac{2021}{z} + \frac{\sin z}{z}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0] = \underline{2021}$.

作业 9. 填空题: (2021 年 B 卷) 设 $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0] = \underline{0}$.

作业 10. (2020 年 A 卷) 求函数 $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^8}$ 在有限奇点处的留数.

解. 它的奇点只有 $z = 0$, 且 0 是 $f(z)$ 的至多 8 阶极点. 从而

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{7!}(z - \sin z)^{(7)}|_{z=0} = \frac{1}{7!}\left(-\sin\left(z + \frac{7\pi}{2}\right)\right)|_{z=0} = \frac{1}{7!}. \quad \blacksquare$$

作业 11. (2020 年 B 卷) 求函数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ 在有限奇点处的留数.

解. 它的奇点只有 $z = \pm i$, 且它们是 $f(z)$ 的至多 1 阶极点. 从而

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), i] &= \left. \frac{e^{iz}}{z+i} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}, \\ \text{Res}[f(z), -i] &= \left. \frac{e^{iz}}{z-i} \right|_{z=-i} = \frac{e}{-2i} = \frac{ei}{2}, \end{aligned} \quad \blacksquare$$

作业 12. (2022 年 A 卷) 求 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

解. $z = 0$ 是二阶极点, 故

$$\text{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{-\sin z \cdot (z^2 - \pi^2) - \cos z \cdot 2z}{(z^2 - \pi^2)^2} \Big|_{z=0} = 0.$$

$z = \pm\pi$ 是一阶极点, 故

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), \pi] &= \left. \frac{\cos z}{z^2(z+\pi)} \right|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi^3}, \\ \text{Res}[f(z), -\pi] &= \left. \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)} \right|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi^3}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

作业 13. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z - 3| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz$.

解. 由于 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}$ 在 $|z - 3| \leq 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, 因此

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi]] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{z - 2\pi} \Big|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z - \pi} \Big|_{z=2\pi} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] = 4i. \end{aligned}$$

作业 14. (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz$.

解. 由于 $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)}$ 在 $|z| \leq 2$ 内的奇点为 $0, 1$, 因此

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1]] \\ &= 2\pi i \left[\frac{\sin z}{z-1} \Big|_{z=0} + \frac{\sin z}{z} \Big|_{z=1} \right] = 2\pi i \sin 1. \end{aligned}$$

作业 15. (2021 年 A 卷) 设 $f(z) = \frac{1}{z^2 \cos z}$, C 为正向圆周 $|z| = 2$.

(1) 求 $f(z)$ 在 C 内部的孤立奇点, 并给出其类型.

(2) 求 $f(z)$ 在上述奇点处的留数.

(3) 求 $\oint_C f(z) dz$.

解. (1) 孤立奇点为二阶极点 $z = 0$, 一阶极点 $z = \pm \frac{\pi}{2}$.

(2)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), 0] &= \left(\frac{1}{\cos z} \right)' \Big|_{z=0} = -\frac{\sin z}{\cos^2 z} \Big|_{z=0} = 0, \\ \operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] &= \frac{1/z^2}{(\cos z)'} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}, \\ \operatorname{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}] &= \frac{1/z^2}{(\cos z)'} \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

(3)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] + \operatorname{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}]] = 0.$$

作业 16. (2021 年 B 卷) 设函数 $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$.

(1) 求 $f(z)$ 在复平面上的所有孤立奇点, 并讨论其类型;

(2) 计算 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数;

(3) 计算积分 $\oint_C f(z) dz$, 其中曲线 C 为正向圆周 $|z| = 2$.

解. (1) 孤立奇点为二阶极点 $z = 1$, 一阶极点 $z = 0$.

(2)

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \left(\frac{e^z}{z} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{e^z z - e^z}{z^2} \Big|_{z=1} = 0,$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{e^z}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1.$$

(3)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1]] = 2\pi i. \quad \blacksquare$$

作业 17. 求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数:

$$(1) \frac{z-1}{z^2+2z}; \quad (2) \frac{1-e^{2z}}{z^5}; \quad (3) \frac{z}{\cos z}; \quad (4) \cos \frac{1}{1-z}; \quad (5) \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

解. (1) 由于 $0, -2$ 均为一阶极点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{z+2} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -2] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z-1}{z} = \frac{3}{2}.$$

(2) 由于 0 为 4 阶极点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} (1 - e^{2z})^{(4)} = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow 0} (-16e^{2z}) = -\frac{2}{3}.$$

(3) 由于 $(k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为 $\cos z$ 的 1 阶零点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{z}{-\sin z} \Big|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi} = (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

(4) 由于

$$\cos \frac{1}{1-z} = 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} + \cdots,$$

因此 $\operatorname{Res}[f(z), 1] = c_{-1} = 0$.

(5) 由于 $(k + \frac{1}{2})\pi i$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的 1 阶零点, 因此

$$\operatorname{Res} \left[f(z), \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} z} \Big|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi i} = 1. \quad \blacksquare$$

作业 18. 9 利用留数计算下述积分:

$$(1) \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z(z-\pi)} dz;$$

$$(2) \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2} dz;$$

$$(3) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z^5} dz, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$(4) \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^9(z-2)^9} dz.$$

解. (1) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为可去奇点 $0, \pi$, 因此

$$\oint_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), \pi]) = 0.$$

(2) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为二阶极点 1 和一阶极点 0 , 因此

$$\text{Res}[f(z), 1] = \left(\frac{e^{2z}}{z} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{2e^{2z}z - e^{2z}}{z^2} \Big|_{z=1} = e^2,$$

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1,$$

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}[f(z), 1] + \text{Res}[f(z), 0]) = 2\pi i (e^2 + 1).$$

(3) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为 3 阶极点 0 , 因此

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} (1 - \cos z)^{(4)} = -\frac{1}{24},$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), 0] = -\frac{\pi i}{12}.$$

(4) $\frac{1}{2}$ 为被积函数 $f(z)$ 的 9 阶极点, 因此

$$\text{Res}[f(z), \frac{1}{2}] = \frac{1}{8!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} [(z-2)^{-9}]^{(8)} = \frac{1}{8!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{16!}{8!} (z-2)^{-17} = -\frac{16!}{8!^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{17}.$$

故

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), \frac{1}{2}] = -\frac{2^{18}16!\pi i}{3^{17}8!^2}. \quad \blacksquare$$

作业 19. 函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二阶极点. 这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \cdots + \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3}, \quad |z-1| > 1,$$

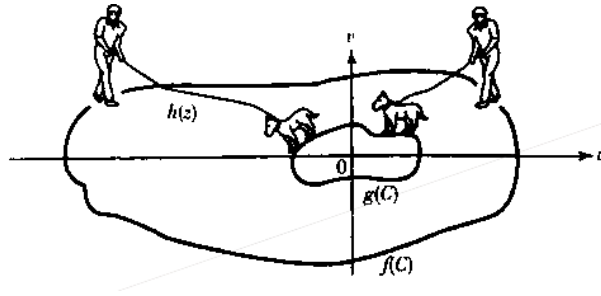
所以“ $z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”. 又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂, 因此 $\text{Res}[f(z), 1] = 0$. 这些说法对吗?

解. 不对, 因为这个洛朗展开并不是在 1 的去心邻域内的洛朗展开. \blacksquare

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 20. 根据辐角原理和下图简要解释下为何路西定理是对的: 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 且在 C 上满足 $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$, 那么在 C 内部 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的零点个数相同.



作业 21. 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上的奇点都是极点.

(1) 证明 $f(z)$ 只有有限多个奇点.

(2) 设 $f(z)$ 在复平面内的奇点为 z_1, \dots, z_n , 其中 z_k 为 d_k 阶极点. 定义

$$g(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{d_k} f(z).$$

根据 $g(z)$ 在 0 和 ∞ 处的洛朗展开的特点证明 $g(z)$ 是一个多项式, 从而 $f(z)$ 是有理函数.

(3) 证明 $\sum_{z \in \mathbb{C}^*} \text{ord}(f, z) = 0$.