# 中 国 科 学 技 术 大 学 随 堂 测 验

2020 ~ 2021 学年第一学期　　　　　复变函数 B(001548)

## 一、每题 1 分, 共 11 分.

**1.** 计算 $(\sqrt{3}+i)^{114514}$.

**2.** 计算 $(-4+4i)^{1/5}$.

**3.** 请问 $\arg(z+1) = -\dfrac{\pi}{2}$ 的图像是什么?

**4.** 请问 $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1919}$ 的图像是什么?

**5.** 请问 $\arg\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{3}$ 的图像是什么?

**6.** 将 $x^2+6x+y^2-18y=810$ 化为复数形式.

**7.** $x^2-y^2=4$ 在 $w=z^2$ 下的像是什么?

**8.** $\arg z$ 是连续函数吗?

**9.** 证明: $f(z) = z\overline{z}^{-1} - \overline{z}z^{-1}$ 在 $z \to 0$ 时极限不存在.

**10.** 求出 $\dfrac{1}{\sin z - 2}$ 的解析区域.

**11.** 证明: 若整函数 (在整个复平面解析) $f$ 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f'(0)=0$.

## 二、每题 2 分, 共 4 分.

**1.** 证明: 如果 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 则 $z_1, z_2, z_3$ 构成一个正三角形, 且单位圆 (圆心为 0, 半径为 1 的圆) 是它的外接圆.

**2.** 证明: 设 $|a|<1$. 证明 $|z|=1$ 当且仅当 $|z-a| = |1-\overline{a}z|$.

## 三、每题 3 分, 共 9 分.

**1.** 验证 $e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y)$ 在全平面解析, 并求出其导数. 它在无穷远解析吗? 为何?

**2.** 求下列全纯函数在 $\{z : |z|<1\}$ 中的零点个数：

(1) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;

(2) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$;

(3) $e^z - 4z^n + 1$.

**3.** 设 4 维实向量空间 $\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ 上的乘法运算为

$$(z_1 + w_1 j)(z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z}_2) j,$$

定义 $\tau(z + wj) = \overline{z} - wj$. 证明

(1) 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$.

(2) 对于任意 $\alpha \in \mathbb{H}$, $\tau(\tau(\alpha)) = \alpha$ 且 $\alpha\tau(\alpha)$ 是非负实数. $\alpha\tau(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.

(3) 对于任意非零 $\alpha \in \mathbb{H}$, 存在 $\beta \in \mathbb{H}$ 使得 $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$.

## 四、每题 4 分, 共 36 分.

**1.** 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z-2}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $\gamma$ 为圆周 $\{z : |z| = 2\}$ 的上半圆, 从 $-2$ 到 $2$.

**2.** 求 $\dfrac{1}{1 - z - z^2}$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展开 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 由此求得斐波那契数列

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

的通项公式.

**3.** 函数 $\sin \dfrac{1}{1-z}$ 有哪些奇点 (包括 $\infty$)? 并求其在 1 处的洛朗展开.

**4.** 计算 $\dfrac{e^z}{z(z-1)}$ 在其所有奇点处的留数.

**5.** 证明如果 $f$ 在复平面解析且有界, 则对任意 $a \in \mathbb{C}$, 有 $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z = 0$, 其中 $R > |a|$. 由此证明 $f$ 是常数.

**6.** 证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\pi$.

**7.** 利用拉普拉斯变换解微分方程 $\begin{cases} y''(t) - y'(t) = e^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

**8.** 计算 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}$.

**9.** 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

# 中 国 科 学 技 术 大 学 试 卷 （A）

2020～2021 学年第一学期　　　　复变函数 B(001548)

## 一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

**1.** 计算 $(2020+i)(2-i)$.

**2.** 计算 $\operatorname{Arccos} 2$.

## 二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

**1.** $\displaystyle\int_C (e^z+3z^2+1)\,\mathrm{d}z$, $C: |z|=2, \operatorname{Re} z>0$.

**2.** $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C: |z|=3$.

**3.** $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C: |z|=4$.

**4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$.

**5.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$.

## 三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

**1.** 求 $\alpha$ 使得 $v(x,y)=\alpha x^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

**2.** 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

**3.** 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在 $1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

**4.** 求方程 $z^8+e^z+6z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 中根的个数, 并说明理由.

**5.** 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+2y'+y=te^t \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

**6.** 设 $f$ 是域 $|z|>r>0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a|>R>r$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=0.$$

# 中国科学技术大学试卷参考答案（A）

2020～2021 学年第一学期　　　　复变函数 B(001548)

## 一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

**1. 【解】**

$$(2020+i)(2-i) = 4040 + 1 + 2i - 2020i = 4041 - 2018i.$$

**2. 【解】**

设 $\cos z = 2$, 则

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2, \quad e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

于是

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i,$$

即 $z = 2n\pi \pm \ln(2+\sqrt{3})i, n \in \mathbb{Z}$.

## 二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

**1. 【解】**

由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z + 3z^2 + 1)\,\mathrm{d}z = (e^z + z^3 + z)\Big|_{-2i}^{2i} = e^{2i} - e^{-2i} - 12i = (2\sin 2 - 12)i.$$

**2. 【解】**

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{5}, \quad \operatorname{Res}[f(z), 1] = \left[\frac{1}{z(z-5)}\right]'\Bigg|_{z=1} = \frac{5-2z}{z^2(z-5)^2}\Bigg|_{z=1} = \frac{3}{16},$$

因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{16}\right) = -\frac{\pi i}{40}.$$

**3. 【解】**

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 $0, \pi$ 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{30}, \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},$$

因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)} = 2\pi i\left[-\frac{1}{30} + \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)}\right] = \frac{\pi^2(\pi+1)i}{15(\pi+6)(5-\pi)}.$$

**4. 【解】**

函数 $R(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+3}$ 在上半平面有 1 阶极点 $-1+2i$, 因此

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz},-1+2i]=\frac{e^{-2-i}}{4i}=\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\right)=\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2}\right)=\frac{\pi\cos 1}{2e^2}.$$

**5. 【解】**

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2-\cos 2\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2(2-\cos\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4(2-\cos\theta)^2}.$$

令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}=\int_{|z|=1}\frac{z\,\mathrm{d}z}{i(z^2-4z+1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上有 2 阶极点 $2-\sqrt{3}$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z),2-\sqrt{3}]=\left[\frac{1}{i(z-2-\sqrt{3})^2}-\frac{2z}{i(z-2-\sqrt{3})^3}\right]\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

## 三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

**1. 【解】**

由 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 可知 $2\alpha y-6y=0$, 因此 $\alpha=3$. 设 $f=u+iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2+1,$$

因此 $u(x,y)=x^3-3xy^2+x+g(y)$. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy+g'(y)=-(6xy+1),\quad g(y)=-y+c$, 从而

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+x-y+c,$$
$$f(z)=x^3-3xy^2+x-y+c+i(3x^2y-y^3+x+y)=z^3+(1+i)z+c.$$

由于 $f(0)=1$, 因此 $c=1, f(z)=z^3+(1+i)z+1$.

**2. 【解】**

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+e^{-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{z^m}{m!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[-2^{-n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]z^n,$$

收敛半径为 2.

**3. 【解】**

设 $w=\dfrac{1}{z+1}$, 则 $0<|w|<1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3+2z^2}&=\frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)}=\frac{w^3}{2}\left[\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right]\\&=\frac{w^3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1+(-1)^n}{2}+n+1\right]w^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-3-(-1)^n}{4}(z+1)^{-n}.\end{aligned}$$

**4. 【解】**

由于在 $|z|=1$ 上

$$|z^8+e^z+1|\leqslant 1+e+1<6=|6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<1$ 中有 1 个根. 由于在 $|z|=2$ 上

$$|6z+e^z+1|\leqslant 12+e^2+1<2^8=|z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<2$ 中有 8 个根. 从而该方程在 $1<|z|<2$ 中有 7 个根.

**5. 【解】**

设 $Y=\mathscr{L}[y]$, 则

$$p^2Y+2pY+Y=\frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y=\frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-1}\right],$$

$$y=\mathscr{L}^{-1}[Y]=\frac{1}{4}(te^t+te^{-t}+e^{-t}-e^t).$$

**6. 【证明】**

设 $R'>|a|$, 则函数 $\dfrac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z|>R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R''>R'+|a|$,

$$\int_{|z|=R'}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=\int_{|z-a|=R''}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

由长大不等式

$$\left|\int_{|z-a|=R''}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z-2\pi i f(a)\right|=\left|\int_{|z-a|=R''}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\pi\max_{|z-a|=R''}|f(z)-f(a)|.$$

令 $R'\to+\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=\int_{|z-a|=R''}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi i f(a).$$

设 $D$ 为区域 $R<|z|<R'$, $C$ 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z-\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=0.$$

# 中 国 科 学 技 术 大 学 试 卷 （B）

2020～2021 学年第一学期　　　复变函数 B(001548)

## 一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

**1.** 计算 $\ln(-i)$.

**2.** 计算 $(-64)^{1/4}$.

## 二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

**1.** $\int_C (e^{-z}-3z^2+1)\,\mathrm{d}z, C:|z|=2, \mathrm{Im}\,z>0.$

**2.** $\int_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z(z+1)^2(z-4)}, C:|z|=3.$

**3.** $\int_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(\cos z)(z-6)}, C:|z|=3.$

**4.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x.$

**5.** $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2}.$

## 三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

**1.** 求 $\alpha$ 使得 $u(x,y)=x^3+\alpha xy^2+x-y$ 是调和函数, 并求实部为 $u(x,y)$ 且满足 $f(0)=i$ 的解析函数 $f(z)$.

**2.** 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=1$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

**3.** 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

**4.** 求方程 $z^3+\dfrac{1}{z}+4z+1=0$ 在 $1<|z|<3$ 中根的个数, 并说明理由.

**5.** 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''-2y'+y=te^{-t} \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

**6.** 设函数 $f$ 在整个复平面解析, 若 $f$ 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f$ 是偶函数.

# 中国科学技术大学试卷参考答案（B）

2020～2021 学年第一学期　　　　复变函数 B(001548)

## 一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

**1. 【解】**由于 $-i = \exp\left(-\dfrac{\pi}{2}i\right)$, 因此 $\ln(-i) = -\dfrac{\pi}{2}i$.

**2. 【解】**

由于 $-64 = 64e^{\pi i}$, 因此

$$(-64)^{1/4} = 2\sqrt{2}\exp\left[\frac{(2n+1)\pi i}{4}\right], \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

即 $2+2i, 2-2i, -2+2i, -2-2i$.

## 二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

**1. 【解】**由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z - 3z^2 + 1)\,\mathrm{d}z = (e^z - z^3 + z)\big|_2^{-2} = e^{-2} - e^2 + 12.$$

**2. 【解】**

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 $-1$, 且

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{4}, \quad \mathrm{Res}[f(z), -1] = \left[\frac{1}{z(z-4)}\right]'\Bigg|_{z=-1} = \frac{4-2z}{z^2(z-4)^2}\Bigg|_{z=-1} = \frac{6}{25},$$

因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)^2(z-4)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{6}{25}\right) = -\frac{\pi i}{50}.$$

**3. 【解】**

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 $\pm\pi/2$ 且

$$\mathrm{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] = -\frac{2}{\pi - 12}, \quad \mathrm{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}] = -\frac{2}{\pi + 12},$$

因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\cos z)(z-6)} = 2\pi i\left(-\frac{2}{\pi - 12} - \frac{2}{\pi + 12}\right) = \frac{8\pi^2 i}{\pi^2 - 144}.$$

**4. 【解】**

函数 $R(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 10}$ 在上半平面有 1 阶极点 $1+3i$, 因此

$$\mathrm{Res}[R(z)e^{iz}, 1+3i] = \frac{e^{-3+i}}{6i} = \frac{\sin 1 - i\cos 1}{6e^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 10}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 10}\,\mathrm{d}x\right] = \mathrm{Re}\left[2\pi i\frac{\sin 1 - i\cos 1}{6e^3}\right] = \frac{\pi\cos 1}{3e^3}.$$

**5. 【解】**

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2+\cos 2\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2(2+\cos\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4(2+\cos\theta)^2}.$$

令 $z=e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1}\frac{z\,\mathrm{d}z}{i(z^2+4z+1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上有 2 阶极点 $-2+\sqrt{3}$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z),-2+\sqrt{3}]=\left[\frac{1}{i(z+2+\sqrt{3})^2}-\frac{2z}{i(z+2+\sqrt{3})^3}\right]\Bigg|_{z=-2+\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

## 三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

**1. 【解】**

由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 可知 $6x+2\alpha x=0$, 因此 $\alpha=-3$. 设 $f=u+iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2+1,$$

因此 $v(x,y)=3x^2y-y^3+y+g(x)$. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy-1=-(6xy+g'(x)),\quad g(x)=x+c$, 从而

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+x+y+c,$$

$$f(z)=x^3-3xy^2+x-y+i(3x^2y-y^3+x+y+c)=z^3+(1+i)z+ci.$$

由于 $f(0)=i$, 因此 $c=1, f(z)=z^3+(1+i)z+i$.

**2. 【解】**

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{1-(z-1)}+e^{-1}e^{-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n+e^{-1}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{(z-1)^m}{m!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[-1+\frac{(-1)^n}{n!}\right](z-1)^n,\end{aligned}$$

收敛半径为 1.

**3. 【解】**

设 $w = 1/z$, 则 $0 < |w| < 1/2$,

$$\frac{1}{z^3+2z^2} = \frac{w^3}{1+2w} = w^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-2w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n w^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty}(-2)^{n-3}z^{-n}.$$

**4. 【解】**

由于 $z \neq 0$, 即要求 $z^4+4z^2+z+1=0$ 的根的个数. 在 $|z|=1$ 上

$$|z^4+z+1| \leqslant 1+1+1 < 4 = |4z^2|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<1$ 中有 2 个根. 由于在 $|z|=3$ 上

$$|4z^2+z+1| \leqslant 36+3+1 < 81 = |z^4|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<3$ 中有 4 个根. 从而该方程在 $1<|z|<3$ 中有 2 个根.

**5. 【解】**

设 $Y = \mathscr{L}[y]$, 则

$$p^2Y - 2pY + Y = \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\right],$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

**6. 【证明】**

设 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

对于 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R},$$

$$f'(iy) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f((y+\Delta y)i)-f(yi)}{\Delta yi} \in i\mathbb{R}.$$

因此

$$f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R},$$

$$f''(iy) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'((y+\Delta y)i)-f'(yi)}{\Delta yi} \in \mathbb{R}.$$

因此 $f''$ 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数. 归纳可知对任意非负整数 $k$, $f^{(2k)}$ 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数, 且 $f^{(2k+1)}(x) \in \mathbb{R}, f^{(2k+1)}(iy) \in i\mathbb{R}$. 从而

$$a_{2k+1} = f^{(2k+1)}(0) = 0 \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R},$$

即 $f(z)$ 是偶函数.