期中考试题

1. 对于任意整数 m, 求最大公因数 $(21m+4, 14m+3)$. (10 分)

2.

1) 求最大公因数 $(252, 198)$, 并把它表为 252 和 198 的整系数线性组合. (5 分)

2) 求最小公倍数 $[252, 198]$. (5 分)

3. 求 $20!$ 的标准素因子分解式. (10 分)

4. 求 $5x+7y=41$ 的全部正整数解. (10 分)

5. 证明多项式

$$x^6+x^5+\cdots+x+1$$

不能分解为两个低于 6 次的有理系数多项式的乘积. (10 分)

6. 令 $\sigma(n)$ 为 n 的所有正因数之和. 求 $\sigma(117)$. (10 分)

7. 令 $\varphi(m)$ 为 Euler 函数. 求 $\varphi(7\cdot 9\cdot 11)$. (10 分)

8. 解同余方程 $7x\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,31)$. (10 分)

9. 解同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,5), \\ x\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,7). \end{cases}$$

(10 分)

10. 问同余方程

$$x^2\equiv 14\,(\mathrm{mod}\,55)$$

是否有解？ (10 分)

期末考试题

1. 用 Fermat 定理 $(p|\, n^p - n)$, 对任意整数 n, 证明

$$2730|\, n^{13} - n.$$

(10 分)

2. 解同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 4 \pmod 7. \end{cases}$$

(10 分)

3. 由 Wilson 定理

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

推出：当 p 为奇素数时，有

$$2^2 \cdot 4^2 \cdots (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod p.$$

(5 分)

4. 求以 3 为二次剩余的素数 $p (> 3)$. (10 分)

5. 问同余方程

$$x^2 \equiv 23 \pmod{91}$$

是否可解？如果可解的话，有几个 $\bmod 91$ 的解？ (10 分)

6. 令

$$f(x) = x^4 + \bar{4}x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{4}, \qquad g(x) = x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{5}$$

为 $\mathbb{F}_7[x]$ 上的多项式. 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$(首项系数为 1), 并将 $d(x)$ 写成

$$d(x) = r(x)f(x) + s(x)g(x),$$

这里 $r(x)$, $s(x)$ 均属于 $\mathbb{F}_7[x]$. (10 分)

7. 设 $s > 1$. 令 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

(10 分)

8. 令 $d(r)$ 为除数函数. 证明

$$\sum_{r\,|\,n} d^3(r) = \Big(\sum_{r\,|\,n} d(r)\Big)^2.$$

(10 分)

9. 令 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数, $\mu(n)$ 为 Möbius 函数. 对于 $x \geq 1$, 证明

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \Big[\frac{x}{n}\Big].$$

(10 分)

10. 对于 $x \geq 2$, 利用渐近公式

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

证明

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log^3 p}{p} = \frac{1}{3} \log^3 x + O(\log^2 x),$$

这里 p 表示素数. (10 分)

11. 令 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数. 对于 $x \geq 2$, 证明

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = O(\log x).$$

(5 分)