近世代数月考

2013年3月27日

1. 设 A, B 是群 G 的两个子群. 试证 AB 是 G 的子群当且仅当 $AB = BA$.

2. 回答下列问题:
 (1) 设 p 是素数, p 方幂阶群是否一定含有 p 阶元?
 (2) 35阶群是否一定同时含有5阶和7阶元素?
 (3) 若有限群 G 同时含有10阶元 x 和6阶元 y, 那么群 G 的阶应该满足什么条件?

3. 试计算:
 (1) S_6 中2阶元的个数.
 (2) A_8 中阶最大的元素个数.

4. 设群 G 作用在集合 Σ 上. 令 t 表示 Σ 在 G 作用下的轨道个数, 对任意 $g \in G$, $f(g)$ 表示 Σ 在 g 作用下的不动点个数. 试证

$$\sum_{g \in G} f(g) = t|G|.$$

5. (1) 若 $G/Z(G)$ 是循环群, 证明 G 为阿贝尔群, 故非交换有限群 G 的中心 $Z(G)$ 的指数 $\geqslant 4$.
 (2) 如果 G 为 n 阶有限群, t 为 G 中共轭类的个数, $c = \frac{t}{n}$. 证明 $c = 1$ 或者 $c \leqslant \frac{5}{8}$.

6. 设群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在上半平面 $\mathcal{H}$ 上的作用即: 对 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\gamma(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. 试证明微分形式 $\dfrac{dx \wedge dy}{y^2}$ 在 γ 作用下不变, 即若 $z = x + yi$, $\gamma(z) = x' + y'i$, 则

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{dx' \wedge dy'}{y'^2}.$$

7. (1) 设 p 是素数, $n \geqslant 1$. 证明映射

$$\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \mod p & b \mod p \\ c \mod p & d \mod p \end{pmatrix}$$

为群的满同态.
 (2) 试求群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ 的阶.
 (3) 设正整数 m, n 互素. 试证明:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

近世代数月考

2013年4月27日

1. 证明复数域 $\mathbb{C}$ 可嵌入到环 $M_2(\mathbb{R})$ 中.

2. 令 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 且对任意 $i \neq j$, $|G_i|$ 和 $|G_j|$ 互素. 证明 G 的任意子群 H 都是它的子群 $H \cap G_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的直积.

3. 设 R 是环, $\mathfrak{m}$ 是 R 的一个理想. 假设 R 的每个不属于 $\mathfrak{m}$ 的元素是 R 中 的单位. 证明 $\mathfrak{m}$ 是 R 的唯一极大理想.

4. 设 F 是域, 多项式环 $F[x]$ 的分式域记为 K. 对于 $a \in F$, 称 $f(x) \in K$ 在点 a 处正则是指存在 $p_1(x), p_2(x) \in F[x]$, $p_2(a) \neq 0$ 且 $f(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$. 定义 f 在 a 点的值为 $f(a) = p_1(a)/p_2(a)$.

(1) 证明 $f(a)$ 的定义是良好的.

记 O 为所有在 a 点正则的 $f(x)$ 构成的环.

(2) 求 O 的单位群.

(3) 证明 O 中真理想 I 均是由 $(x-a)^n (n \in \mathbb{N})$ 生产的主理想.

5. 证明150阶群不是单群.

6. 设有限阿贝尔群 $A \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_s^{\alpha_s}\mathbb{Z}$, 其中 p_i 是素数, $\alpha_i \geq 1$ 为正整数. 证明 A 的任意子群 B 均同构于 $\mathbb{Z}/p_1^{\beta_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_s^{\beta_s}\mathbb{Z}$, 其中 $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ 为整数.

7. 设 R 是正整数集合到域 K 的函数全体. 在 R 上定义加法为一般函数的加法, 乘法定义为卷积: 对于 $f, g \in R$, 卷积 $f * g$ 即

$$(f * g)(m) = \sum_{xy=m} f(x)g(y).$$

其中求和过所有正整数对 (x, y) 使得 $xy = m$.

(1) 证明 R 在上述加法和乘法意义下构成交换环, 其单位元为函数 δ, 其中 $\delta(1) = 1$, $\delta(x) = 0$ 如 $x \neq 1$.

(2) 证明常值函数 $\varphi_1 : x \mapsto 1$ 的逆元为 Möbius函数

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = 1; \\ (-1)^r, & x\text{是}r\text{ 个不同素数的乘积}; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

(3) 由(2), 你能给出 Möbius 公式并给出理由吗?

近世代数月考

2013年5月26日

1.(1) 求 $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式.
(2) 求 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式.

2. 设域 F 的特征不是 2. 证明 F 上任意 2 次扩张 K 均可写为 $K = F(\sqrt{a})$, 其中 $a \in F - F^2$. 如果 F 的特征为 2, 结论是否成立?

3. 设 $p \equiv 3 \mod 4$ 是素数. 证明商环 $\mathbb{Z}[i]/(p)$ 同构于 $\mathbb{F}_{p^2}$.

4. 设 D 是整环但不是域, 证明 $D[x]$ 不是主理想整环.

5. 设 α, β 分别是有限域 $\mathbb{F}_p$ (p 是素数)的代数闭包 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 中的多项式 $x^2 - 2$ 和 $x^2 - 3$ 的根. 令 $E = \mathbb{F}_p(\alpha, \beta)$. 讨论 $E/\mathbb{F}_p$ 的扩张次数.

6. 证明两个整多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 中互素当且仅当它们在 $\mathbb{Z}[x]$ 中生成的理想含有一个非零整数.

7. 设 F 是域, R 是 F 上的所有 x 项系数为 0 的多项式构成的集合. 证明 R 是环但不是 UFD.

8. 证明当 $n \geq 3$ 时, $x^{2^n} + x + 1$ 是 $\mathbb{F}_2[x]$ 上的可约多项式.

近世代数期末考试试卷

2013年6月17日

注意: 试卷共12题, 每题30分, 总分300分. 答卷人可以选作其中任何10题. 多做按最优10题给分. 题目难度和次序无确定关系. **答题纸上必须注明题号**.

1. 证明或者给出反例:
   (1) 如果正整数 m 整除 阿贝尔群 G 的阶 n, 则 G 有 m 阶子群.
   (2) 如果正整数 m 整除 G 的阶 n, 则 G 有 m 阶子群.

2. 给出群 S_6 中元素可能的型, 并求出每个型中元素的个数.

3. 证明 $\mathbb{Q}$ 不是循环群, 但它的任意有限生成子群都是循环群.

4. 试给出一个9元域并给出它的乘法表.

5. 设a, b 是群G中的两个元素, 证明 a与 a^{-1} 有相同阶, ab 与 ba 有相同阶.

6. 试求出 (同构意义下) 所有 6 阶群.

7. 试求出 (同构意义下) 所有 8 阶群.

8. 设 p 是素数.
   (1) 证明 p^2 阶群都是阿贝尔群.
   (2) 求$\mathrm{GL}_3(F_p)$ 中Sylow p-群的阶.
   (3) 给出$\mathrm{GL}_3(F_p)$ 中Sylow p-群的具体例子, 并说明它不是阿贝尔群.

9. 设 p, l 为互不相同的素数, n 为正整数. 求 $\mathbb{F}_p[x]$ 中首一不可约 l^n 次多项式的个数.

10. 设域 $F = \mathbb{F}_5$ 或者 $\mathbb{Q}$. 证明 $f(x) = x^3 + x + 1$ 为 F 上的不可约多项式. 求 $f(x)$ 在 F 上的 Galois群.

11. 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$ 是四次扩张; 并求出它的 Galois群.

12. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ 是 Galois 扩张, 并求出 Galois 群;
    (2) 求元素 $\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$ 在 Q 上的极小多项式.

13. 设 E/F 为有限 Galois 扩张, N 和 M 为中间域, $E \supseteq N \supseteq M \supseteq F$, 并且 N 是 M 在 F 上的正规闭包. 证明

$$\mathrm{Gal}(E/N) = \bigcap_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \sigma\,\mathrm{Gal}(E/M)\sigma^{-1}.$$

14. 设 E 为 $x^4 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域.
    (1) 试求出 $E/\mathbb{Q}$ 的全部中间域.
    (2) 试问哪些中间域是 $\mathbb{Q}$ 的 Galois 扩张?

15. 设 $E = \mathbb{Q}(\alpha)$, 其中 $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$. 证明

(1) α^2-2 也是多项式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 的根.
(2) $E/\mathbb{Q}$ 是正规扩张.
(3) 试求 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

16. 试确定 $\mathbb{Z}[x]$ 中所有的素理想和极大理想.

17. 设 u 是多项式 $x^3-6x^2+9x+3=0$ 的根.
(1) 求证 $[\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q}]=3$.
(2) 试将 u^4 和 $(u^2-6u+8)^{-1}$ 表示为 1, u, u^2 的线性组合.

18. 设 p 是素数.
(1) 证明 $f(x^p)=f(x)^p$ 对于任意 $f(x)\in\mathbb{F}_p[x]$ 成立.
(2) 设整数 $m\geq n\geq 0$. 证明: $\binom{pm}{pn}\equiv\binom{m}{n}\bmod p$.

19. 设 p 是$\mathbb{Z}$ 上的奇素数, n为正整数. 证明 x^n-p 是 $\mathbb{Z}[i]$ 上的不可约多项式.

20. 证明 x^3+nx+2 对所有 $n\neq 1,-3,-5$ 是$\mathbb{Z}$ 上的不可约多项式.

21. 设 $d\geq 3$ 为无平方因子的整数, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
(1) 证明 K 中任意元素在$\mathbb{Q}$ 上的最小多项式的次数等于 1或者 2.
(2) 设 $\mathcal{O}$ 是 K 中所有在 $\mathbb{Q}$上的最小多项式为首一整系数多项式的元素的集合. 证明 $\mathcal{O}$ 是秩 2 自由阿贝尔加法群.

22. 设 $n\geq 3$ 为无平方因子的整数, $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-n})$.
(1) 证明 2, $\sqrt{-n}$ 和 $1+\sqrt{-n}$ 在 R 上为不可约元.
(2) 证明 $\sqrt{-n}$ 和 $1+\sqrt{-n}$ 在 R 上不能同时为素元.

23. 证明若整环R 中的素理想都是主理想, 则 R 是PID (提示: 反证法. 利用Zorn引理, 考虑对所有非主理想按包含关系排序获得的极大元).

24. 设 $\mathfrak{p}$ 是含幺交换环 R 的素理想, $I_1,\ldots,I_n$ 是 R 的理想. 如果 $\mathfrak{p}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}I_i$, 则 $\mathfrak{p}$ 必等于某个 I_i.