近世代数月考

2011年10月10日

1. 设$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, B为其中上三角阵构成的子群, $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. 证明: G是BwB与B的不交并.

2. 给出$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$的一个Sylow p子群.

3. 证明$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$中不含指数有限的真子群.

4. 已知四元数$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$中的乘法如下给出:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

(1) 证明$\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$在乘法意义下构成群.

(2) 对于$\alpha = a + bi + cj + dk$, 定义其共轭为$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$. 证明$N : \alpha \mapsto \alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 是$\mathbb{H}^\times$到$\mathbb{R}^\times$的群同态.

(3) 证明$\ker N$同构于

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} :\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ |\alpha_1|^2 + \alpha_2|^2 = 1 \right\},$$

其中复数$\alpha = x + yi$ 的共轭是$x - yi$.

5. (1) 若$G/C(G)$是循环群, 证明G为阿贝尔群, 故非交换有限群G的中心$C(G)$的指数≥ 4.

(2) 如G为n阶有限群, t为G中共轭类的个数, $c = \frac{t}{n}$. 证明$c = 1$或者$c \leq \frac{5}{8}$.

6. 设H, K是G的正规子群，且$HK = G$, $H \cap K = \{1\}$. 证明G 同构于$H \times K$.

7. 设群G是24阶群且其中心平凡, 证明G同构于S_4.

近世代数月考

2011年11月14日

1. (10分) 设$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$在$\mathbb{Q}[x]$上可约, 证明其在$\mathbb{Z}[x]$上可约.

2. (15分) 设$I_1,\cdots,I_n$是环R中的理想, 且素理想$P=\bigcap\limits_{i=1}^{n}I_i$. 证明: P必等于其中某个I_i.

3. (20分) 设$A=\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
   (1) 证明A是欧几里得整环.
   (2) 给出素数p在A中的因式分解.

4. (25分) 设A是有限阿贝尔群, S^1为单位圆. 定义$A^*=\{$群同态$f: A\to S^1\}$, 并在其中定义乘法为:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x).$$

   (1) 证明A^*是有限阿贝尔群.
   (2) 证明A 同构于A^*.
   (3) 如果B是A的子群, 则映射$\varphi: A^*\to B^*$, $f\mapsto f|_B$是满同态, 其中$f|_B$是同态$f: A\to S^1$在B上的限制(提示: 可以先考虑A/B是p阶循环群的情形).

5. (30分) 设D为整环, K是D的商域. 设集合$S\subseteq D$ 满足条件
   (i) $0\notin S$, $1\in S$;
   (ii) 对$x,y\in S$, 则$xy\in S$.

定义

$$S^{-1}D=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in D,\ n\in S\right\}\subseteq K.$$

证明:
   (1) $S^{-1}D$ 是K中包含D的子环.
   (2) $S^{-1}D$中的素理想必有$S^{-1}\mathfrak{p}=\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathfrak{p},\ n\in S\}$的形式, 其中$\mathfrak{p}$是$D$的素理想.
   (3) $\operatorname{Spec}S^{-1}D$与集合$\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}D\mid\mathfrak{p}\cap S=\emptyset\}$ 一一对应.
   (4) 设$D=\mathbb{Z}$, $\mathfrak{p}=p\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}-\mathfrak{p}$, 则$\mathbb{Z}/\mathfrak{p}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 同构于$S^{-1}\mathbb{Z}/S^{-1}\mathfrak{p}$.

近世代数月考

2011年12月12日

1. (30分) (1) 证明对于$n \geq 3$, $x^{2^n}+x+1$在$\mathbb{F}_2[x]$上是可约多项式.

(2) 设p, l 为素数, n 为正整数, 试求$F_p[x]$中l^n次首一不可约多项式的个数.

2. (20分) 设p是素数, $\zeta_p=\exp(2\pi i/p)$是p次本单位根, $(\frac{a}{p})$为Legendre符号. 设

$$G=\sum_{a\in\mathbb{F}_p}\zeta_p^a\Big(\frac{a}{p}\Big).$$

证明:

(1) $\sum\limits_{a\in\mathbb{F}_p}\zeta_p^a=0$.

(2) $G\cdot\overline{G}=p$, 其中$\overline{G}$ 是G的复共轭.

(3) $G=\pm\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}$.

3. (25分) 设$F\supseteq\mathbb{Q}$是数域, K/F是域的n次有限扩张. 设$\alpha\in K$. 令T_α为K上的F-线性变换$T_\alpha(x)=\alpha x$.

(1) 设α在F上的最小多项式为$f(X)=X^d+a_{d-1}X^{d-1}+\cdots+a_0$. 试求$\mathrm{Tr}\,T_\alpha$和$\det T_\alpha$.

(2) 定义$\mathrm{Tr}(\alpha)=\mathrm{Tr}(T_\alpha)$. 证明$B: K\times K\to F$, $(x,y)\mapsto\mathrm{Tr}(xy)$是$F$上的双线性形, 且是非退化的(即若$x\in K$, $B(x,y)=0$对所有y成立. 则$x=0$).

4. (25分) (1) 证明$\mathbb{R}[x]$中的不可约多项式一定是1次或者2次的(注: 只知道代数基本定理).

(2) 证明$\mathbb{Z}[x]$上的极大理想必有$(p,f(x))$的形式, 其中p是素数, $f(x) \bmod p$是$\mathbb{F}_p[x]$上的不可约多项式.

近世代数期末考试试卷

2012年1月3日

注意: 试卷共12题, 每题30分, 总分300分. 答卷人可以选作其中任何10题. 多做按最优10题给分. 题目难度和次序无确定关系. **答题纸上必须注明题号**.

1. (1) 设a, b为群G的元素, a的阶是5, 且$a^3b = ab^3$. 证明: $ab = ba$.
   (2) 试求S_6中2阶元的个数.

2. 证明$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 由第一类初等矩阵$I + aE_{ij}$生成, 其中E_{ij}的第(i, j)-元为1, 其他元为0.

3. 设G, A, B 为有限阿贝尔群. 如果$G \oplus A \cong G \oplus B$, 证明$A$ 同构于B.

4. 说明对角线为1的上三角阵集合是$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$的一个Sylow p子群, 并求$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$所有Sylow p子群的个数.

5. 设R为交换环. 称$x \in R$为幂零元, 如果存在$n \in \mathbb{N}$. $x^n = 0$. 求证:
   (1) R中所有幂零元构成的集合N是R的一个理想.
   (2) R中所有素理想均包含N.

6. (1) 试求$11 + 7i$与$18 - i$在$\mathbb{Z}[i]$上的最大公因子.
   (2) 若m, n为整数, 则m, n在$\mathbb{Z}$上的最大公因子等于它们在$\mathbb{Z}[i]$上的最大公因子.

7. 设p为素数, A为n阶整方阵, $A^p = I$且$A \neq I$, 证明$n \geq p - 1$.

8. 回忆$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$的判别式是

$$D(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

设p为素数.
   (1) 计算$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$的判别式.
   (2) 证明$\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$中唯一的二次子扩张是$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})$.

9. 构作一个8元域, 并写出其加法表和乘法表.

10. 设K是$f(x) = x^4 - 2$在$\mathbb{Q}$上的分裂域, 试求$K/\mathbb{Q}$的Galois群和全部子域.

11. 设$\alpha_1^2 = 2$, $\alpha_2^2 = 3$. 求$\alpha_1 + \alpha_2$在$\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$上的不可约多项式.

12. 设K是$f(x) = x^4 - 2$在$\mathbb{F}_5$上的分裂域, 试求$K/\mathbb{F}_5$的Galois群和全部子域.